КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ
Физико-технический факультет
Кафедра Электроники и астрофизики

Алимгазинова Н.Ш.

Теоретические основы электротехники

для студентов, обучающихся по специальности
«Промышленная электроника и системы управления»

Алматы, 2025

10 лекция. Цепи с распределенными параметрами

Цель лекции. Изучить основные понятия и физические принципы распространения электромагнитных волн в линиях передачи; рассмотреть телеграфные уравнения, их решения при гармоническом воздействии; сформировать понимание характеристик однородной линии и условий её согласования.

План

1. Основные определения.
2. Однородная линия при гармоническом воздействии. Телеграфные уравнения.
3. Неискажающая линия

1. Основные определения

Если размеры электрической цепи становятся сравнимы с длиной волны, то следует учитывать изменение электромагнитных процессов на участках цепи не только от времени, но и от положения участка в пространстве из-за конечной скорости распространения электромагнитной энергии. Элементы цепи с протяженными размерами называют *цепями с распределенными параметрами*. К таким цепям, например, можно отнести линию, соединяющую антенну и телевизор – коаксиальный кабель, а так же компьютерные сети. С повышением тактовой частоты и быстродействия соединяющие линии в компьютере (шины данных и т.п.) становятся все ближе к свойствам цепей с распределенными параметрами. Чтобы передать сигнал от одного участка цепи к другому с максимальным КПД, отсутствием отражений и искажений сигнала, связанных с потерей информации, нужно научиться рассчитывать подобные цепи. Впервые с проблемой длинных линий столкнулись в цепях передачи телеграфных сигналов на дальние расстояния. Кирхгоф и Томсон еще до того, как Максвелл сформулировал общие законы электромагнетизма, рассматривали малый элемент линии длиной dX как элементарный четырехполюсник, структура которого учитывала явления, происходящие в линии, и содержала следующие погонные параметры:

R, $\frac{Ом}{м}$ - сопротивление проводов линии (нагрев);

L, $\frac{Гн}{м}$ - индуктивность проводов (накопление магнитной энергии);

C, $\frac{Ф}{м}$ - емкость между проводниками (накопление электрической энергии);

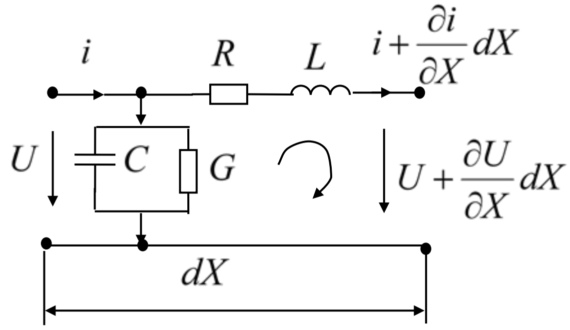
G, $\frac{См}{м}$ - проводимость между проводниками (потери в изоляции в виде тепла).

2. Однородная линия при гармоническом воздействии. Телеграфные уравнения.

Составим уравнения по законам Кирхгофа для элементарного четырехполюсника:

$$i-(C\frac{\partial U}{\partial t}+GU)dX-(i+\frac{\partial i}{\partial X}dX)=0$$

$$-U+(L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri)dX+(U+\frac{\partial U}{\partial X}dX)=0$$



$$\begin{cases} -\dfrac{\partial i}{\partial X}=GU+C\dfrac{\partial U}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial U}{\partial X}=Ri+L\dfrac{\partial i}{\partial t} \end{cases}$$

Рисунок 1

Полученная система уравнений для длинной линии записана в мгновенной форме и годится для расчета линии при любой форме сигнала. В частном случае гармонического сигнала можно, используя символический метод, переписать систему в комплексном виде:

$$\begin{cases} -\dfrac{d\dot{U}}{dX}=R\dot{I}+j\omega L\dot{I} \\ -\dfrac{d\dot{I}}{dX}=G\dot{U}+j\omega C\dot{U} \end{cases}.$$

Так как временная зависимость в комплексном виде опускается, уравнения записаны в обычных производных. Дифференцируя первое уравнение и подставляя в него второе, получим:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dX^2}=(R+j\omega L)(G+j\omega C)\dot{U}=\gamma^2\dot{U},$$

где $\gamma=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}=\alpha+j\beta$ - коэффициент распространения в линии; α - коэффициент затухания (Нп/м); β - коэффициент фазы (рад/м).

Решение дифференциального уравнения ищем в виде:

$$\dot{U}(X) = A_1 e^{-\gamma X} + A_2 e^{\gamma X}.$$

Второе уравнение для нахождения постоянных интегрирования A_1, A_2:

$$\frac{d\dot{U}}{dX} = -\gamma A_1 e^{-\gamma X} + \gamma A_2 e^{\gamma X} = -\dot{I}(R + j\omega L),$$

или

$$\dot{I}(X) = \frac{\gamma}{R + j\omega L}(A_1 e^{-\gamma X} - A_2 e^{\gamma X}) = \frac{1}{\underline{Z}}(A_1 e^{-\gamma X} - A_2 e^{\gamma X}),$$

где $\underline{Z} = \frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}$ - волновое сопротивление линии (Ом).

Схема линии с распределенными параметрами, длиной l:

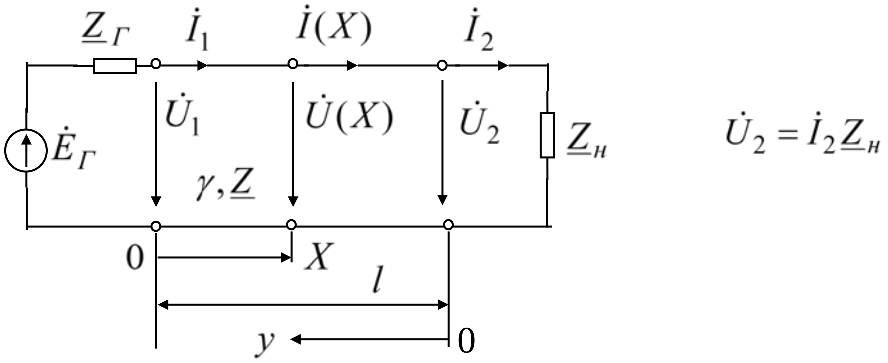


Рисунок 2

Чтобы определить постоянные интегрирования A_1, A_2 в выражениях для напряжения и тока в любой точке линии *X*, запишем их при *X*=0:

$$\begin{cases} \dot{U}(0) = A_1 + A_2 \\ \dot{I}(0) = \dfrac{A_1 - A_2}{\underline{Z}} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_1 + A_2 \\ \dot{I}_1 = \dfrac{A_1 - A_2}{\underline{Z}} \end{cases}.$$

По известным граничным значениям U_1, I_1 определяется:

$$A_1 = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}}{2}; \quad A_2 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}}{2}.$$

$$\dot{U}(X) = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1\underline{Z}}{2} \cdot e^{-\gamma X} + \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1\underline{Z}}{2} \cdot e^{\gamma X}$$
$$\dot{I}(X) = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_1\underline{Z}}{2\underline{Z}} \cdot e^{-\gamma X} - \frac{\dot{U}_1 - \dot{I}_1\underline{Z}}{2\underline{Z}} \cdot e^{\gamma X}.$$

Проанализируем волновой процесс в линии, для чего запишем решения для напряжения в мгновенной форме (восстановим мгновенное значение напряжения по его комплексному значению, используя запись $A_1 = a_1 e^{j\varphi_1}$, $A_2 = a_2 e^{j\varphi_2}$, $e^{\gamma X} = e^{\alpha X} \cdot e^{\beta X}$):

$$U(X,t) = a_1 e^{-\alpha X} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1 - \beta X) + a_2 e^{\alpha X} \sin(\omega t + \varphi_2 + \beta X).$$

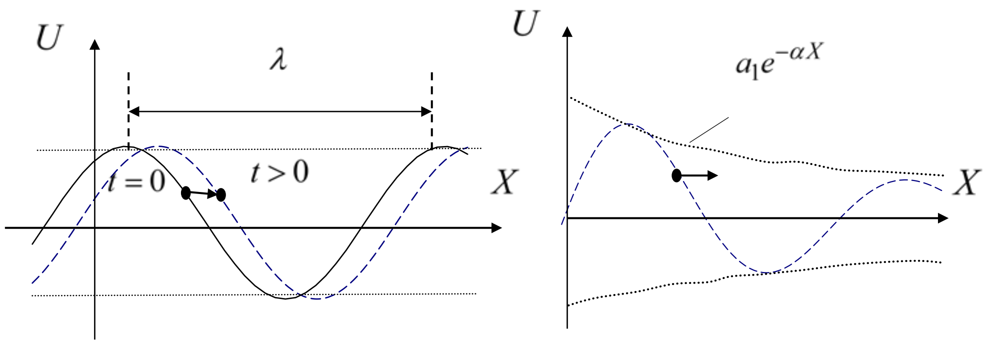


Рисунок 3

Рассмотрим вначале линию без потерь, т.е. $R = 0$, $G = 0$ или $\alpha = 0$. Первое слагаемое $U_1(X,t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1 - \beta X)$. Построим график этой функции при $t = 0$. Это синусоида. Ее пространственный период называется длиной волны λ, т.е. $2\pi = \beta\lambda$ или $\lambda = 2\pi/\beta$. Проследим за смещением точки равной фазы $\omega t + \varphi_1 - \beta X = const$ с увеличением времени. С ростом t координата X также должна увеличиваться, т.е. волна $U_1(X,t)$ движется от генератора к нагрузке, поэтому называется падающей (прямой) волной. Скорость перемещения точек равной фазы называется фазовой скоростью V_ϕ.

$$V_\phi = \frac{dX}{dt} = \frac{d\left[(\omega t + \varphi_1 - const)/\beta\right]}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot f \cdot \lambda}{2\pi} = f\lambda.$$

Если в линии есть потери, т.е. $\alpha \neq 0$, то амплитуда волны при продвижении к нагрузке будет уменьшаться по закону $a_1 e^{-\alpha X}$, т.е. происходит затухание.

Аналогичный анализ второго слагаемого $U_2(X,t) = a_2 e^{\alpha X} \sin(\omega t + \varphi_2 + \beta X)$ показывает, что эта волна движется от нагрузки к генератору и называется отраженной (обратной). При наличии потерь ее амплитуда уменьшается с уменьшением X .

Подобные волны в линии есть и для тока. Таким образом, в линии существует суперпозиция падающих и отраженных волн тока и напряжения.

Иногда на практике удобнее вести отсчет координаты от нагрузки, т.к. там проще связь между током и напряжением $\dot{U}_2 = I_2 \underline{Z}_н$. Перейдем к новой переменной $y = l - X$. Тогда после подстановки $X = l - y$ в $\dot{U}(X)$ и $\dot{I}(X)$ получим:

$$\dot{U}(y) = A_1 e^{-\gamma l} \cdot e^{\gamma y} + A_2 e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma y} = B_1 e^{\gamma y} + B_2 e^{-\gamma y}$$

$$\dot{I}(y) = \frac{B_1 e^{\gamma y} - B_2 e^{-\gamma y}}{\underline{Z}}.$$

При $y = 0$ имеем:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = B_1 + B_2 \\ \dot{I}_2 = \dfrac{B_1 - B_2}{\underline{Z}} \end{cases} \Rightarrow \quad B_1 = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}}{2}, \quad B_2 = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}}{2}$$

$$\begin{cases} \dot{U}(y) = \dfrac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}}{2} \cdot e^{\gamma y} + \dfrac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}}{2} \cdot e^{-\gamma y} \\ \dot{I}(y) = \dfrac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}}{2\underline{Z}} \cdot e^{\gamma y} - \dfrac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}}{2\underline{Z}} \cdot e^{-\gamma y} \end{cases}$$

падающие отраженные

Используя формулы

$$ch(k) = \frac{e^k + e^{-k}}{2},$$

$$sh(k) = \frac{e^k - e^{-k}}{2},$$

можно записать:

$$\begin{cases} \dot{U}(y) = \dot{U}_2 \cdot ch(\gamma y) + \dot{I}_2 \underline{Z} \cdot sh(\gamma y) \\ \dot{I}(y) = \dfrac{\dot{U}_2}{Z} \cdot sh(\gamma y) + \dot{I}_2 \underline{Z} \cdot ch(\gamma y) \end{cases},$$

если $y = l$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cdot ch(\gamma y) + \dot{I}_2 \underline{Z} \cdot sh(\gamma y) \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z} \cdot sh(\gamma y) + \dot{I}_2 \underline{Z} \cdot ch(\gamma y) \end{cases}.$$

Для линии без потерь

$$\gamma = j\beta, \; ch(j\beta y) = \cos\beta y; \;\; sh(j\beta y) = j \cdot \sin\beta y \, .$$

$$\Theta = \beta y = \frac{2\pi}{\lambda} y = \frac{2\pi f}{V_\phi} y$$

- электрическая длина линии.

Входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{вх}(y) = \frac{\dot{U}(y)}{\dot{I}(y)} \, .$$

Одновременное существование в линии падающих и отраженных волн приводит к их интерференции и вдоль линии результирующее колебание изменяет свою амплитуду и фазу в зависимости от величины нагрузки $\underline{Z}_н$.

Коэффициент отражения от нагрузки по напряжению и току:

$$\varGamma_U = \frac{\dot{U}_{отр}(0)}{\dot{U}_{пад}(0)} = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2\underline{Z}}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}_н - \underline{Z}}{\underline{Z}_н + \underline{Z}}; \;\; \varGamma_I = -\varGamma_U \, .$$

$\underline{Z}_н = 0$ (короткое замыкание)

$$\varGamma_U = -1; \; \varGamma_I = 1$$

отраженная волна напряжения на нагрузке равна падающей, но в противофазе, отраженная волна тока равна падающей;

$\underline{Z}_н = \infty$ (холостой ход)

$$\varGamma_U = 1; \;\; \varGamma_I = -1$$

$Z_н = Z$ (согласованный режим)

$$\varGamma_U = -0; \; \varGamma_I = 0$$

отраженные волны отсутствуют, энергия полностью проходит в нагрузку. Ниже на рисунке 4 представлены эпюры распределения амплитуд напряжения и тока вдоль линии для этих случаев в линии без потерь.

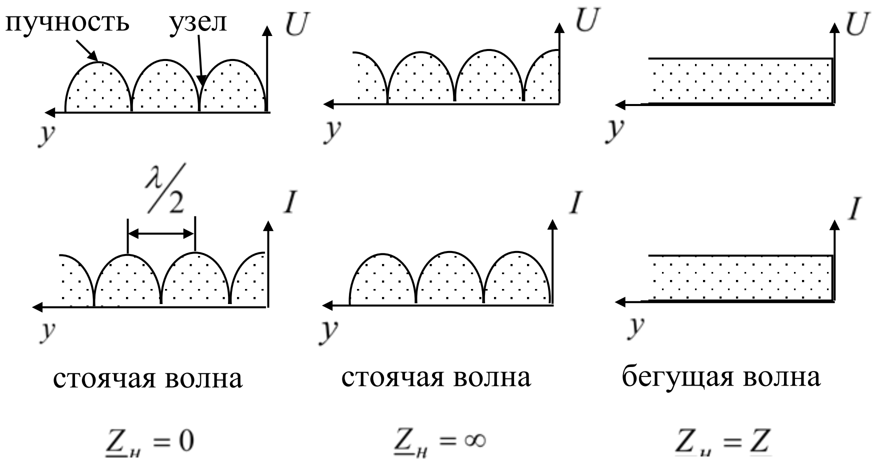


Рисунок 4

3. Неискажающая линия

Вторичные параметры линии $\underline{Z}$ и γ зависят от частоты, поэтому чтобы информация при передаче не исказилась, следует выполнить определенные условия: фазовая скорость и коэффициент ослабления всех гармоник должны быть одинаковыми. Тогда все гармоники сигнала придут одновременно в нагрузку, ослабленными в одинаковое число раз, с одинаковым коэффициентом отражения. Для этого необходимо выполнить соотношение:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}.$$

Действительно:

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{\frac{R/L + j\omega}{G/C + j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = const.$$

$$\gamma = \sqrt{LC} \cdot \sqrt{(R/L + j\omega)(G/C + j\omega)} = R\sqrt{\frac{C}{L}} + j\omega\sqrt{LC} = \alpha + j\beta.$$

$$\alpha = const, \quad V_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = const.$$

Затухание и фазовая скорость не зависят от частоты.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение основным понятиям.
2. Опишите работу однородной линии при гармоническом воздействии.
3. Запишите телеграфные уравнения.
3. Дайте определение неискажающей линии

Литература

1 Алимгазинова Н.Ш. Теория Электрических Цепей. Курс Лекций. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 8,7 п.л..

2 Манаков С.М., Алимгазинова Н.Ш., Бурисова Д.Ж., Исимова А.Т. Основы электротехники в упражнениях и задачах. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. –10 п.л..

3 Манаков С.М., Алимгазинова Н.Ш., Толегенова А.А. Учебно-Методическое Пособие По Курсу "Теория Электрических Цепей". – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 12 п.л.

4 Теоретические основы электротехники. Версия 1.0 [Электронный ресурс]: конспект лекций / С. Г. Иванова, В. В. Новиков. – Электрон. дан. (4 Мб). – Красноярск: ИПК СФУ, 2008.

5 Атабеков Г. И. Основы теории цепей : учебник / Г. И. Атабеков . – 2-е изд., испр . – СПб. : Лань, 2006 . – 432 с.

6 Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники. М: КОРОНА-Век, 2012. - 368 с.

7 Атабеков Г.И. Нелинейные электрические цепи. Теоретические основы электротехники. Учебное пособие. СПб.: Питер, Лань, 2010. – 432 с.

8 Бессонов Л.А. Электрические цепи. Теоретические основы электротехники. М: Юрайт, 2016. – 701 с.

9 Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для студ. вузов спец. Радиотехника. – М.: Высшая школа, 2000. – 574 с.